**绝密★启用前**

 **2003**年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷**（理工农医类）**

（满分150分，考试时间120分钟）

**考生注意**

**1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.**

**2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.**

**3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.**

**4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.**

第Ⅰ卷 （共110分）

一、填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得

4分，否则一律得零分

1．函数的最小正周期T= .

2．若 .

3．在等差数列中，*a*5=3, *a*6=－2,则*a*4+*a*5+…+*a*10= 

4．在极坐标系中，定点A点B在直线上运动，当线段AB最短

 时，点B的极坐标是 

5．在正四棱锥P—ABCD中，若侧面与底面所成二面角的大小为60°，则异面直线PA与BC所成角的大小等于 .（结果用反三角函数值表示）

6．设集合A={*x*||*x*|<4},B={*x*|*x*2－4*x*+3>0}, 则集合{*x*|*x*∈A且= .

7．在△ABC中，sinA;sinB:sinC=2:3:4,则∠ABC= .（结果用反三角函数值表示）

8．若首项为*a*1，公比为q的等比数列的前n项和总小于这个数列的各项和，则首项*a*1，公比q的一组取值可以是（*a*1，q）= .

9．某国际科研合作项目成员由11个美国人、4个法国人和5个中国人组成.现从中随机选出两位作为成果发布人，则此两人不属于同一个国家的概率为 .（结果用分数表示）

10．方程*x*3+lg*x*=18的根*x*≈ .（结果精确到0.1）

11．已知点其中n的为正整数.设Sn表示△ABC外接圆的面积，则= .

12．给出问题：F1、F2是双曲线=1的焦点，点P在双曲线上.若点P到焦点F1的距离等于9，求点P到焦点F2的距离.某学生的解答如下：双曲线的实轴长为8，由

 ||PF1|－|PF2||=8，即|9－|PF2||=8，得|PF2|=1或17.

 该学生的解答是否正确？若正确，请将他的解题依据填在下面空格内，若不正确，将正确的结果填在下面空格内.

二、选择题（本大题满分16分）本大题共4题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13．下列函数中，既为偶函数又在（0，π）上单调递增的是 （ ）

 A．y=tg|*x*|. B．y=cos(－*x*).

 C． D．.

14．在下列条件中，可判断平面α与β平行的是 （ ）

 A．α、β都垂直于平面*r*.

 B．α内存在不共线的三点到β的距离相等.

 C．*l*，*m*是α内两条直线，且*l*∥β，m∥β.

 D．*l*，*m*是两条异面直线，且*l*∥α，m∥α, *l*∥β，m∥β.

15．*a*1、b1、c1、*a*2、b2、c2均为非零实数，不等式*a*1*x*2+b1*x*+c1>0和*a*2*x*2+b2*x*+c2>0的解集分别为集合M和N，那么“”是“M=N”的 （ ）

 A．充分非必要条件. B．必要非充分条件.

 C．充要条件 D．既非充分又非必要条件.

16．*f*()是定义在区间[－c,c]上的奇函数，其图象如图所示：令g（）=*af*（）+b，则下

 列关于函数g（）的叙述正确的是 （ ）



 A．若*a*<0,则函数g（）的图象关于原点对称.

 B．若*a*=－1，－2<b<0,则方程g（）=0有大于2的实根.

 C．若*a*≠0,b=2,则方程g（）=0有两个实根.

 D．若a≥1,b<2,则方程g（）=0有三个实根.

三、解答题（本大题满分86分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

17．（本题满分12分）

 已知复数*z*1=cosθ*－i*，*z*2=sinθ+*i*，求| *z*1·*z*2|的最大值和最小值.

18．（本题满分12分）

 已知平行六面体ABCD—A1B1C1D1中，A1A⊥平面ABCD，AB=4，AD=2.若B1D⊥BC，直线B1D与平面ABCD所成的角等于30°，求平行六面体ABCD—A1B1C1D1的体积.



19．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分9分.

 已知数列（n为正整数）是首项是*a*1，公比为q的等比数列.

 （1）求和：

 （2）由（1）的结果归纳概括出关于正整数n的一个结论，并加以证明.

20．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

 如图，某隧道设计为双向四车道，车道总宽22米，要求通行车辆限高4.5米，隧道全长2.5千米，隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.



 （1）若最大拱高h为6米，则隧道设计的拱

 宽*l*是多少？

 （2）若最大拱高h不小于6米，则应如何设

 计拱高h和拱宽*l*，才能使半个椭圆形隧

 道的土方工程量最最小？

 （半个椭圆的面积公式为，柱体体积为：底面积乘以高.本题结果精确到0.1米）

21．（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分7分.

 在以O为原点的直角坐标系中，点A（4，－3）为△OAB的直角顶点.已知|AB|=2|OA|，且点B的纵坐标大于零.

 （1）求向量的坐标；

 （2）求圆关于直线OB对称的圆的方程；

 （3）是否存在实数*a*，使抛物线上总有关于直线OB对称的两个点？若不存在，说明理由：若存在，求*a*的取值范围.

22．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分5分，第2小题满分6分，第3小题满分7分.

已知集合M是满足下列性质的函数*f*(*x*)的全体：存在非零常数T，对任意*x*∈R，有*f*(*x+T*)=T *f*(*x*)成立.

 （1）函数*f*(*x*)= *x* 是否属于集合M？说明理由；

 （2）设函数*f*(*x*)=*ax*（*a*>0,且*a*≠1）的图象与y=*x*的图象有公共点，证明：

 *f*(*x*)=*ax*∈M；

 （3）若函数*f*(*x*)=sin*kx*∈M ,求实数k的取值范围.



2003年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（理工农医类）答案

一、（第1题至第12题）

1．π. 2．. 3．－49 . 4．. 5．arctg2. 6．[1,3].

7． 8．的一组数）. 9．

10．2.6 . 11．4π 12．|PF2|=17.

二、（第13题至第16题）

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 题 号 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 代 号 | C | D  | D | B |

三、（第17题至第22题）

17．[解]



 故的最大值为最小值为.

18．[解]连结BD，因为B1B⊥平面ABCD，B1D⊥BC，所以BC⊥BD.

在△BCD中，BC=2，CD=4，所以BD=.



又因为直线B1D与平面ABCD所成的角等于30°，所以

∠B1DB=30°，于是BB1=BD=2.

故平行六面体ABCD—A1B1C1D1的体积为SABCD·BB1=.

19．[解]（1）



 （2）归纳概括的结论为：

若数列是首项为*a*1，公比为q的等比数列，则



20．[解]（1）如图建立直角坐标系，则点P（11，4.5）， 椭圆方程为.

将b=*h*=6与点P坐标代入椭圆方程，得.因此隧道的拱宽约为33.3米.



（2）[解一]

由椭圆方程，得



故当拱高约为6.4米、拱宽约为31.1米时，土方工程量最小.

[解二]由椭圆方程，得 于是



得以下同解一.

21．[解]（1）设得

 

 所以*v*－3>0,得*v*=8,故={6，8}.

（2）由={10，5}，得B（10，5），于是直线OB方程：

由条件可知圆的标准方程为：(*x*－3)2+y(y+1)2=10, 得圆心（3，－1），半径为.

设圆心（3，－1）关于直线OB的对称点为（*x* *,*y）则

故所求圆的方程为(*x*－1)2+(y－3)2=10.

（3）设P (*x*1,y1), Q (*x*2,y2) 为抛物线上关于直线OB对称两点，则



故当时，抛物线y=*ax*2－1上总有关于直线OB对称的两点.

22．[解]（1）对于非零常数T，*f*(*x*+T)=*x*+T, T*f*(*x*)=T*x*. 因为对任意*x*∈R，*x*+T= T*x*不能恒成立，所以*f*(*x*)=

（2）因为函数*f*(*x*)=*ax*（*a*>0且*a*≠1）的图象与函数y=*x*的图象有公共点，

所以方程组：有解，消去y得*ax*=*x*,

显然*x*=0不是方程*ax*=*x*的解，所以存在非零常数T，使*a*T=T.

于是对于*f*(*x*)=*ax*有 故*f*(*x*)=*ax*∈M.

（3）当k=0时，*f*(*x*)=0，显然*f*(*x*)=0∈M.

当k≠0时，因为*f*(*x*)=sin*kx*∈M，所以存在非零常数T，对任意*x*∈R，有

*f*(*x*+T)=T *f*(*x*)成立，即sin(*kx*+*k*T)=Tsin*kx* .

因为k≠0，且*x*∈R，所以*kx*∈R，*kx*+*k*T∈R，

于是sin*kx* ∈[－1，1]，sin(*kx*+*k*T) ∈[－1，1]，

故要使sin(*kx*+*k*T)=Tsin*kx* .成立，

只有T=，当T=1时，sin(*kx*+*k*)=sin*kx* 成立，则*k*=2*mπ*, m∈Z .

当T=－1时，sin(*kx*－*k*)=－sin*kx* 成立，

即sin(*kx*－*k*+*π*)= sin*kx* 成立，

则－*k*+*π*=2*mπ*, m∈Z ，即*k*=－2(*m*－1) *π*, *m*∈Z .

综合得，实数*k*的取值范围是{*k*|*k*= *mπ*, *m*∈Z}