**绝密★启用前**

 **2012**年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷**（理工农医类）**

（满分150分，考试时间120分钟）

**考生注意**

**1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.**

**2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.**

**3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.**

**4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.**

**一、填空题（56分）：**

1．计算： （为虚数单位）。

2．若集合，，则 。

3．函数的值域是 。

4．若是直线的一个法向量，则的倾斜角的大小为  （结果用反三角函数值表示）。

5．在的二项展开式中，常数项等于 。

6．有一列正方体，棱长组成以1为首项、为公比的等比数列，体积分别记为，则  。[

7．已知函数（为常数）。若在区间上是增函数，则的取值范围是 。

8．若一个圆锥的侧面展开图是面积为的半圆面，则该圆锥的体积为 。

9．已知是奇函数，且，若，则 。

10．如图，在极坐标系中，过点的直线与极轴的夹角，

若将的极坐标方程写成的形式，则  。

11．三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是 （结果用最简分数表示）。

12．在平行四边形中，，边、的长分别为2、1，若、分别是边、上的点，且满足，则的取值范围是  。

13．已知函数的图象是折线段，其中、、，

函数（）的图象与轴围成的图形的面积为 。

14．如图，与是四面体中互相垂直的棱，，若，

且，其中、为常数，则四面体的体积的最

大值是 。[来

**二、选择题（20分）：**

15．若是关于的实系数方程的一个复数根，则（  ）

A． B．  C． D．

16．在中，若，则的形状是（ ）[来

A．锐角三角形 B．直角三角形 C．钝角三角形 D．不能确定

17．设，，随机变量取值的概率均为，随机变量取值的概率也均为，若记分别为的方差，则（ ）

A． B．

 C． D．与的大小关系与的取值有关

18．设，，在中，正数的个数是（  ）

A．25  B．50 C．75  D．100

**三、解答题（74分）：**

19．（6+6=12分）如图，在四棱锥中，底面是矩形，[来

底面，是的中点，已知，，，求：

（1）三角形的面积；

（2）异面直线与所成的角的大小。

20．（6+8=14分）已知函数．

（1）若，求的取值范围；

（2）若是以2为周期的偶函数，且当时，有，求函数（）的反函数。

21．（6+8=14分）海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为轴正方向建立平面直角坐标系（以1海里为单位长度），则救援船恰好在失事船正南方向12海里处，如图．现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线；②定位后救援船即刻沿

直线匀速前往救援；③救援船出发小时后，失事船所在位置的横坐标为．

（1）当时，写出失事船所在位置的纵坐标．若此时两船恰好会合，求

救援船速度的大小和方向；

（2）问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？

22．（4+6+6=16分）在平面直角坐标系中，已知双曲线：．

（1）过的左顶点引的一条渐进线的平行线，求该直线与另一条渐进线及轴围成的三角形的面积；

（2）设斜率为1的直线交于、两点，若与圆相切，求证：；

（3）设椭圆：，若、分别是、上的动点，且，求证：到直线的距离是定值。

23．（4+6+8=18分）对于数集，其中，，定义向量集，若对任意，存在，使得，则称具有性质．例如具有性质．

（1）若，且具有性质，求的值；

（2）若具有性质，求证：，且当时，；

（3）若具有性质，且、（为常数），求有穷数列的通项公式。

**2012上海高考数学试题（理科）答案与解析**

**一．填空题**

1．计算： （为虚数单位）.

**【答案】**

**【解析】.**

**【点评】**本题着重考查复数的除法运算，首先，将分子、分母同乘以分母的共轭复数，将分母实数化即可.

2．若集合，，则 .

**【答案】** 

**【解析】**根据集合A ，解得，由**，所以**

**.**

**【点评】**本题考查集合的概念和性质的运用，同时考查了一元一次不等式和绝对值不等式的解法.解决此类问题，首先分清集合的元素的构成，然后，借助于数轴或韦恩图解决.

3．函数的值域是 .

**【答案】**

**【解析】根**据题目**，因为，**所以**.**

**【点评】**本题主要考查行列式的基本运算、三角函数的范围、二倍角公式，属于容易题，难度较小.考纲中明确要求掌握二阶行列式的运算性质.

4．若是直线的一个法向量，则的倾斜角的大小为 （结果用反三角函数值表示）.

**【答案】**

**【解析】**设直线的倾斜角为，则.

**【点评】**本题主要考查直线的方向向量、直线的倾斜角与斜率的关系、反三角函数的表示.直线的倾斜角的取值情况一定要注意，属于低档题，难度较小.

5．在的二项展开式中，常数项等于 .

**【答案】**

**【解析】**根据所给二项式的构成，构成的常数项只有一项，就是 .

**【点评】**本题主要考查二项式定理.对于二项式的展开式要清楚，特别注意常数项的构成.属于中档题.

6．有一列正方体，棱长组成以1为首项、为公比的等比数列，体积分别记为，则 .

**【答案】**

**【解析】**由正方体的棱长组成以为首项，为公比的等比数列，可知它们的体积则组成了一个以1为首项，为公比的等比数列，因此， .

**【点评】**本题主要考查无穷递缩等比数列的极限、等比数列的通项公式、等比数列的定义.考查知识较综合.

7．已知函数（为常数）.若在区间上是增函数，则的取值范围是 .

**【答案】**

**【解析】**根据函数看出当时函数增函数，而已知函数在区间上为增函数，所以的取值范围为：** .**

**【点评】**本题主要考查指数函数单调性，复合函数的单调性的判断，分类讨论在求解数学问题中的运用.本题容易产生增根，要注意取舍，切勿随意处理，导致不必要的错误.本题属于中低档题目，难度适中.

8．若一个圆锥的侧面展开图是面积为的半圆面，则该圆锥的体积为 .

**【答案】**

**【解析】**根据该圆锥的底面圆的半径为，母线长为，根据条件得到，解得母线长，所以该圆锥的体积为：.

**【点评】**本题主要考查空间几何体的体积公式和侧面展开图.审清题意，所求的为体积，不是其他的量，分清图形在展开前后的变化；其次，对空间几何体的体积公式要记准记牢，属于中低档题.

9．已知是奇函数，且，若，则 .

**【答案】**

**【解析】**因为函数为奇函数，所以  .

**【点评】**本题主要考查函数的奇偶性.在运用此性质解题时要注意：函数为奇函数，所以有这个条件的运用，平时要加强这方面的训练，本题属于中档题，难度适中.

10．如图，在极坐标系中，过点的直线与极轴的夹角，

若将的极坐标方程写成的形式，则 .

**【答案】**

**【解析】**根据该直线过点，可以直接写出代数形式的方程为：，将此化成极坐标系下的参数方程即可 ，化简得.

**【点评】**本题主要考查极坐标系，本部分为选学内容，几乎年年都有所涉及，题目类型以小题为主，复习时，注意掌握基本规律和基础知识即可.对于不常见的曲线的参数方程不作要求.本题属于中档题，难度适中.

11．三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是 （结果用最简分数表示）.

**【答案】**

**【解析】**一共有27种取法，其中有且只有两个人选择相同的项目的取法共有18种，所以根据古典概型得到此种情况下的概率为.

**【点评】**本题主要考查排列组合概率问题、古典概型.要分清基本事件数和基本事件总数.本题属于中档题.

12．在平行四边形中，，边、的长分别为2、1，若、分别是边、上的点，且满足，则的取值范围是 .

**【答案】**

**【解析】**以向量所在直线为轴，以向量所在直线为轴建立平面直角坐标系，如图所示，因为，所以  设根据题意，有.

所以，所以

****

**【点评】**本题主要考查平面向量的基本运算、概念、平面向量的数量积的运算律.做题时，要切实注意条件的运用.本题属于中档题，难度适中.

13．已知函数的图象是折线段，其中、、，

函数（）的图象与轴围成的图形的面积为 .

**【答案】**

**【解析】**根据题意得到，从而得到所以围成的面积为，所以围成的图形的面积为 .

**【点评】**本题主要考查函数的图象与性质，函数的解析式的求解方法、定积分在求解平面图形中的运用.突出体现数形结合思想，本题综合性较强，需要较强的分析问题和解决问题的能力，在以后的练习中加强这方面的训练，本题属于中高档试题，难度较大.

14．如图，与是四面体中互相垂直的棱，，若，

且，其中、为常数，则四面体的体积的最

大值是 .

**【答案】**

**【解析】**据题，也就是说，线段的长度是定值，因为棱与棱互相垂直，当时，此时有最大值，此时最大值为：**.**

**【点评】**本题主要考查空间四面体的体积公式、空间中点线面的关系.本题主要考虑根据已知条件构造体积表达式，这是解决问题的关键，本题综合性强，运算量较大.属于中高档试题.

**二、选择题（20分）**

15．若是关于的实系数方程的一个复数根，则（ ）

A． B． C． D．

**【答案】 B**

**【解析】**根据实系数方程的根的特点也是该方程的另一个根，所以

，即，，故答案选择**B.**

**【点评】**本题主要考查实系数方程的根的问题及其性质、复数的代数形式的四则运算，属于中档题，注重对基本知识和基本技巧的考查，复习时要特别注意.

16．在中，若，则的形状是（ ）

A．锐角三角形 B．直角三角形 C．钝角三角形 D．不能确定

 **【答案】**C

**【解析】**由正弦定理，得代入得到，

由余弦定理的推理得，所以C为钝角，所以该三角形为钝角三角形.故选择C

**【点评】**本题主要考查正弦定理及其推理、余弦定理的运用.主要抓住所给式子的结构来选择定理，如果出现了角度的正弦值就选择正弦定理，如果出现角度的余弦值就选择余弦定理.本题属于中档题.

17．设，，随机变量取值的概率均为，随机变量取值的概率也均为，若记分别为的方差，则（ ）

A． B．

 C． D．与的大小关系与的取值有关

**【答案】** A

**【解析】** 由随机变量的取值情况，它们的平均数分别为：，

且随机变量的概率都为，所以有＞. 故选择A.

**【点评】**本题主要考查离散型随机变量的期望和方差公式.记牢公式是解决此类问题的前提和基础，本题属于中档题.

18．设，，在中，正数的个数是（ ）

A．25 B．50 C．75 D．100

**【答案】D**

[解析] 对于1≤*k*≤25,*ak*≥0(唯*a*25=0),所以*Sk*(1≤*k*≤25)都为正数.

当26≤*k*≤49时,令,则,画出*kα*终边如右,

其终边两两关于*x*轴对称,即有,

所以+++++0

+++

*x*

*y*

*α*

2*α*

12*α*

13*α*

…

24*α*

23*α*

26*α*

27*α*

49*α*

48*α*

38*α*

37*α*

…

…

…

=+++++

+,其中*k*=26,27,,49,此时,

所以,又,所以,

从而当*k*=26,27,,49时,*Sk*都是正数,*S*50=*S*49+*a*50=*S*49+0=*S*49>0.

对于*k*从51到100的情况同上可知*Sk*都是正数. 综上,可选D.

[评注] 本题中数列难于求和,可通过数列中项的正、负匹配来分析*Sk*的符号,为此,需借助分类讨论、数形结合、先局部再整体等数学思想.而重中之重,是看清楚角序列的终边的对称性,此为攻题之关键.

三、解答题（本大题共有5题，满分74分）

19．如图，在四棱锥*P*-*ABCD*中，底面*ABCD*是矩形，

*PA*⊥底面*ABCD*，*E*是*PC*的中点.已知*AB=*2，

*AD=*2，*PA=*2.求：

（1）三角形*PCD*的面积；（6分）

（2）异面直线*BC*与*AE*所成的角的大小.（6分）

[解]（1）因为*PA*⊥底面*ABCD*，所以*PA*⊥*CD*，又*AD*⊥*CD*，所以*CD*⊥平面*PAD*，

 从而*CD*⊥*PD*. ……3分

 因为*PD=*，*CD*=2，

*A*

*B*

*C*

*D*

*P*

*E*

*x*

*y*

*z*

 所以三角形*PCD*的面积为. ……6分

 （2）[解法一]如图所示，建立空间直角坐标系，

 则*B*(2, 0, 0)，*C*(2, 2,0)，*E*(1, , 1)，

 ，. ……8分

 设与的夹角为*θ*，则

 ，*θ*=.

 由此可知，异面直线*BC*与*AE*所成的角的大小是 ……12分

*A*

*B*

*C*

*D*

*P*

*E*

*F*

 [解法二]取*PB*中点*F*，连接*EF*、*AF*，则

 *EF*∥*BC*，从而∠*AEF*（或其补角）是异面直线

 *BC*与*AE*所成的角 ……8分

 在中，由*EF*=、*AF*=、*AE*=2

 知是等腰直角三角形，

 所以∠*AEF*=.

因此异面直线*BC*与*AE*所成的角的大小是 ……12分

**【点评】**本题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力．综合考查空间中两条异面直线所成的角的求解，同时考查空间几何体的体积公式的运用.本题源于《必修2》立体几何章节复习题，复习时应注重课本，容易出现找错角的情况，要考虑全面，考查空间想象能力，属于中档题．

20．已知函数.

 （1）若，求的取值范围；（6分）

 （2）若是以2为周期的偶函数，且当时，有，求函数

的反函数.（8分）

[解]（1）由，得.

 由得. ……3分

 因为，所以，.

 由得. ……6分

 （2）当*x*∈[1,2]时，2-*x*∈[0,1]，因此

. ……10分

由单调性可得.

因为，所以所求反函数是，. ……14分

**【点评】**本题主要考查函数的概念、性质、分段函数等基础知识．考查数形结合思想，熟练掌握指数函数、对数函数、幂函数的图象与性质，属于中档题．

21．海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为*y*轴

正方向建立平面直角坐标系（以1海里为单位长度），则救援船恰在失事船的正南方向12海

*x*

*O*

*y*

*P*

*A*

里*A*处，如图. 现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线

；②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；③救

援船出发小时后，失事船所在位置的横坐标为.

 （1）当时，写出失事船所在位置*P*的纵坐标. 若此时

两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向；（6分）

 （2）问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？（8分）

[解]（1）时，*P*的横坐标*xP=*，代入抛物线方程

 中，得*P*的纵坐标*yP=*3. ……2分

 由|*AP*|=，得救援船速度的大小为海里/时. ……4分

 由tan∠*OAP*=，得∠*OAP*=arctan，故救援船速度的方向

 为北偏东arctan弧度. ……6分

 （2）设救援船的时速为海里，经过小时追上失事船，此时位置为.

 由，整理得.……10分

 因为，当且仅当=1时等号成立，

 所以，即.

 因此，救援船的时速至少是25海里才能追上失事船. ……14分

22．在平面直角坐标系中，已知双曲线.

 （1）过的左顶点引的一条渐近线的平行线，求该直线与另一条渐近线及*x*轴围成

的三角形的面积；（4分）

 （2）设斜率为1的直线*l*交于*P*、*Q*两点，若*l*与圆相切，求证：

*OP*⊥*OQ*；（6分）

 （3）设椭圆. 若*M*、*N*分别是、上的动点，且*OM*⊥*ON*，

求证：*O*到直线*MN*的距离是定值.（6分）

[解]（1）双曲线，左顶点，渐近线方程：.

 过点A与渐近线平行的直线方程为，即.

 解方程组，得. ……2分

 所以所求三角形的面积1为. ……4分

 （2）设直线*PQ*的方程是.因直线与已知圆相切，

 故，即. ……6分

 由，得.

 设*P*(*x*1, *y*1)、*Q*(*x*2, *y*2)，则.

 又2，所以

 

，

故*OP*⊥*OQ*. ……10分

 （3）当直线*ON*垂直于*x*轴时，

 |*ON*|=1，|*OM*|=，则*O*到直线*MN*的距离为.

 当直线*ON*不垂直于*x*轴时，

 设直线*ON*的方程为（显然），则直线*OM*的方程为.

 由，得，所以.

同理. ……13分

 设*O*到直线*MN*的距离为*d*，因为，

 所以，即*d*=.

 综上，*O*到直线*MN*的距离是定值. ……16分

**【点评】**本题主要考查双曲线的概念、标准方程、几何性质及其直线与双曲线的关系、椭圆的标准方程和圆的有关性质.特别要注意直线与双曲线的关系问题，在双曲线当中，最特殊的为等轴双曲线，它的离心率为，它的渐近线为，并且相互垂直，这些性质的运用可以大大节省解题时间，本题属于中档题 ．

23．对于数集，其中，，定义向量集

. 若对于任意，存在，使得，则称*X*

具有性质**P**. 例如具有性质**P**.

 （1）若*x*＞2，且，求*x*的值；（4分）

 （2）若*X*具有性质**P**，求证：1∈*X*，且当*xn*＞1时，*x*1=1；（6分）

 （3）若*X*具有性质**P**，且*x*1=1，*x*2=*q*（*q*为常数），求有穷数列的通

项公式.（8分）

[解]（1）选取，*Y*中与垂直的元素必有形式. ……2分

 所以*x*=2*b*，从而*x*=4. ……4分

 （2）证明：取.设满足.

 由得，所以、异号.

 因为-1是*X*中唯一的负数，所以、中之一为-1，另一为1，

故1∈*X*. ……7分

假设，其中，则.

选取，并设满足，即，

则、异号，从而、之中恰有一个为-1.

若=-1，则2，矛盾；

若=-1，则，矛盾.

所以*x*1=1. ……10分

 （3）[解法一]猜测，*i*=1, 2, …, *n*. ……12分

 记，*k*=2, 3, …, *n*.

 先证明：若具有性质**P**，则也具有性质**P.**

 任取，、∈.当、中出现-1时，显然有满足；

 当且时，、≥1.

 因为具有性质**P**，所以有，、∈，使得，

从而和中有一个是-1，不妨设=-1.

假设∈且∉，则.由，得，与

∈矛盾.所以∈.从而也具有性质**P.** ……15分

现用数学归纳法证明：，*i*=1, 2, …, *n*.

当*n*=2时，结论显然成立；

 假设*n=k*时，有性质**P**，则，*i*=1, 2, …, *k*；

 当*n=k*+1时，若有性质**P**，则

 也有性质**P**，所以.

 取，并设满足，即.由此可得*s*与*t*中有且只有一个为-1.

 若，则1，不可能；

 所以，，又，所以.

 综上所述，，*i*=1, 2, …, *n*. ……18分

 [解法二]设，，则等价于.

 记，则数集*X*具有性质**P**当且仅当数集*B*关于

原点对称. ……14分

注意到-1是*X*中的唯一负数，共有*n*-1个数，

所以也只有*n*-1个数.

由于，已有*n*-1个数，对以下三角数阵

 

 

 ……

 

 注意到，所以，从而数列的通项公式为

 ，*k*=1, 2, …, *n*. ……18分

**【点评】**本题主要考查数集、集合的基本性质、元素与集合的关系等基础知识，本题属于信息给予题，通过定义“具有性质”这一概念，考查考生分析探究及推理论证的能力．综合考查集合的基本运算，集合问题一直是近几年的命题重点内容，应引起足够的重视．