**2021年普通高等学校招生全国统一考试（新高考I卷）**

**数 学**

一、单选题

1.设集合，，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

B

解析：

，选B.

2.已知，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

C

解析：

，选C.

3.已知圆锥的底面半径为，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

B

解析：

设母线长为，则.

4.下列区间中，函数单调递增的区间是（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

A

解析：

单调递增区间为：，令，故选A.

5.已知，是椭圆的两个焦点，点在上，则的最大值为（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

C

解析：

由椭圆定义，，则，故选C.

6.若，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

C

解析：

，故选C.

7.若过点可以作曲线的两条切线，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

D

解析：

设切点为，

∵，∴，

则切线斜率，

切线方程为，

又∵在切线上以及上，

则有，

整理得，

令，

则，

∴在单调递减，在单调递增，

则在时取到极小值即最小值，

又由已知过可作的两条切线，

等价于有两个不同的零点，

则，得，

又当时，，则，

∴，

当时，有，

即有两个不同的零点.

∴.

8.有个相同的球，分别标有数字，从中有放回的随机取两次，每次取个球.甲表示事件“第一次取出的球的数字是”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是”，则（ ）

A.甲与丙相互独立

B.甲与丁相互独立

C.乙与丙相互独立

D.丙与丁相互独立

答案：

B

解析：

由题意知，两点数和为的所有可能为：，，，，，

两点数和为的所有可能为：，，，，，，

∴，，，，

，，，，

故，B正确，故选B.

二、多选题

9.有一组样本数据，由这组数据得到新样本数据，其中，为非零常数，则（ ）

A.两组样本数据的样本平均数相同

B.两组样本数据的样本中位数相同

C.两组样本数据的样本标准差相同

D.两组样本数据的样本极差相同

答案：

C、D

解析：

对于A选项：，，∴，∴A错误；

对于B选项：可假设数据样本中位数为，由可知数据样本的中位数为，∴B错误；

对于C选项：



，∴C正确；

对于D选项：∵，∴两组样本数据极差相同，∴D正确。

10.已知为坐标原点，点，，，，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

A、C

解析：

，，∴A正确；

，

，,∴B错；

，，∴C正确；

，，

∴D错.

11.已知点在圆上，点，，则（ ）

A.点到直线的距离小于

B.点到直线的距离大于

C.当最小时，

D.当最大时，

答案：

A、C、D

解析：

由已知易得直线的方程为.

圆心到直线的距离，

∴直线与圆相离，

则到的距离的取值范围为，

又，

则A正确，B错误，

由图易得，

当在点处时，与圆相切，

此时最小，

，，

∴，

同理当在点处，最大，

此时.

故C、D正确.



12.在正三棱柱中，，点满足，其中，，则（ ）

A.当时，的周长为定值

B.当时，三棱锥的体积为定值

C.当时，有且仅有一个点，使得

D.当时，有且仅有一个点，使得平面

答案：

B、D

解析：

对于A，当时，，∴，此时在线段上运动，此时的周长不为定值，A错.



对于B，当时，，此时在线段上运动,

平面，点到平面的距离即为点到平面的距离，

为定值，B正确.



对于C，当时，，分别取，的中点，此时在线段上运动，要使，只需在平面上的射影与垂直，此时在或的位置，有两个，C错误.



对于D，时，，分别取的中点，则在线段上运动，∵正三棱柱中，，，要使得平面，只需在平面上的射影与垂直，有且只有一个点即为点时，满足题意，D正确.



三、填空题

13.已知函数是偶函数，则 .

答案：



解析：

因为为偶函数，则，即，整理则有

，故.

14.已知为坐标原点，抛物线的焦点为，为上一点，与轴垂直，为轴上一点，且.若，则的准线方程为 .

答案：



解析：

因为垂直轴，故点坐标为，又因为，则，即，故，则准线方程为.

15.函数的最小值为 .

答案：



解析：

当时，，，时，，时，，在上单调递减，在上单调递增，当时，，函数单调递减，综上，函数在上单调递减，在上单调递增，所以函数最小值为.

16.某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折.规格为的长方形纸，对折次共可以得到，两种规格的图形，它们的面积之和，对折次共可以得到，，三种规格的图形，它们的面积之和，以此类推.则对折次共可以得到不同规格图形的种数为 ；如果对折次，那么 .

答案：





解析：

（1）易知有，，，，，共种规格.

（2）由题可知对折次共有种规格，且面积为，故，则，记，则，故



，则，故

.

四、解答题

17.已知数列满足，.

（1）记，写出，，并求数列的通项公式；

（2）求的前项和.

答案：

见解析；

解析：

（1），，，

，

∴是以为公差的等差数列，∴.

（2），

，∴.

18.某学校组织“一带一路”知识竞赛，有，两类问题.每位参加比赛的同学先在

两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若

回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛

结束.类问题中的每个问题回答正确得分，否则得分；类问题中的每个问题

回答正确得分，否则得分.

已知小明能正确回答类问题的概率为， 能正确回答类问题的概率为，

且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答类问题，记为小明的累计得分，求的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

答案：

见解析；

解析：

（1）若小明先回答问题，记为小明累计得分，则的取值可能为：，，，因为各题互相独立，由分步完成原理得，，，列表如下：



则的数学期望.

（2）若小明先回答问题，记为小明的累计得分，则的取值可能为，，，因为各题互相独立，由独立性原理知，，，列表如下：



先答类，则的数学期望为：，

由（1）知，∴小明先选B类问题作答.

19.记的内角的对边分别为.已知，点在边上，.

（1）证明：；

（2）若，求.

答案：

见解析；

解析：

（1）由，根据正弦定理可得，∴，

又，∴，∴.

（2），，又由（1）

，，

，∴，

∴，，∴或，

或（舍），∴.



20.如图，在三棱锥中，平面平面，，为的中点.

（1）证明：；

（2）若是边长为的等边三角形，点在棱上，，且二面角的大小为，求三棱锥的体积.



答案：

见解析

解析：

（1）平面平面，平面平面，∵，为中点，∴，平面，∴平面，平面，∴.

（2）方法一：取中点，∵为正三角形，∴，过作与交于点，则，∴，，两两垂直，以为坐标原点，分别以，，为，，轴建立空间直角坐标系，，，，设，则，平面，∴平面的法向量为，，∴，不妨设，则，，则，二面角的大小为，∴，∴，

，∴，∴.

方法二：过作交于点，再过作交于点，显然这样会有平面，而这个正三角形加上，可知，意味着，同时很自然的也会有，而二面角很显然就是，这个是，说明，

综合上面的条件，会得到，然后，再然后，故，同时，得到，那么就有.

21.在平面直角坐标系中，已知点，，点满足.记的轨迹为.

（1）求的方程；

（2）设点在直线上，过的两条直线分别交于，两点和，两点，且，求直线的斜率与直线的斜率之和.

答案：

见解析

解析：

（1），，，，

表示双曲线的右支，的方程为.

（2）设，设直线的方程为：，，，



，

，

∴，

设，同理可得，

∴，∴，

∵，∴，.

22.已知函数.

（1）讨论的单调性；

（2）设，为两个不相等的正数，且，证明：.

答案：

见解析

解析：

（1），令，

当，，单调递增；当时，，单调递减.

（2），∴，

令，，即证，∴，

令，，令，

当，，单调递增；当时，，单调递减.

∵，∴，，

要证，即证，即证，

令，，

，单调递增，∴，左边证毕！再证右边：∵，要证，即证，

令，，∴，

∴在上单调递增，∴，∴，证毕！